TITLE:
$L^2 (\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について(線形作用素の理論と応用に関する最近の発展)

AUTHOR(S):
長谷川, 敦史; 斎藤, 吉助

CITATION:
長谷川, 敦史 ...[et al]. $L^2 (\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について(線形作用素の理論と応用に関する最近の発展). 数理解析研究所講究録 2007, 1535: 62-71

ISSUE DATE:
2007-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/58996

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1535 巻 2007 年 62-71

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について

(株) ディスコ 長谷川敦史 (Atsushi Hasegawa)
Disco Inc.
新潟大理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
Faculty of Science、Niigata University

1 序文と準備

$\mathbb{T}^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| = 1\}$ とし、$L^2(\mathbb{T}^2)$ を $\mathbb{T}^2$ 上のルベーグ空間 $H^2(\mathbb{T}^2)$ を $\mathbb{T}^2$ 上のハーディ空間とする。

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が不変とは

$$z\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}、w\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

を満たすときいう。

$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の構造は $L^2(\mathbb{T})$ の不変部分空間の構造と違って、かなり複雑である。$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間は、Beurling 型の不変部分空間、即ち、ある unimodular function ϕ を用いて $\phi H^2(\mathbb{T}^2)$ と一般的に表すことができるとは限らない。1988 年頃に、Ghatage-Manderkar [2] や Mandrekar [5] 等において、Beurling 型の不変部分空間の研究がなされてきており、不変部分空間が Beurling 型になるための必要かつ十分条件がいくつか得られている。 それ以来、多くの研究者が $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形の研究を行っているが、まだ、すべての不変部分空間の形が決定していない (cf. [4, 6, 7]、etc)。

1998 年に、[4] において、zw-不変部分空間として不変部分空間の構造を研究し、また、Beuring 型不変部分空間と、$L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 ϕ に対する $\phi H_0^2(\mathbb{T}^2)$ という形を含む不変部分空間の別のアプローチを与えた。

$(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ と $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ に対して、f の Fourier 係数を次のように定める.

$$\hat{f}(m,n) = \int_{\mathbb{T}^2} f(z,w)\overline{z}^m\overline{w}^n d\mu.$$

但し μ は $\mathbb{T}^2$ 上の Haar 測度で、$\mathrm{supp}\hat{f} = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2, \hat{f}(m,n) \neq 0\}$ とおく. $L^2(\mathbb{T}^2)$ の部分空間 A に対して、A によって生成された $L^2(\mathbb{T}^2)$ の閉部分空間を $[A]$ で表す。他にも今後用いる $L^2(\mathbb{T}^2)$ の幾つかの部分空間を定義する。

(i) $H^2(z)$ と $H^2(w)$ をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする。

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m0}z^m, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n}w^n。$$

(ii) H_z^2 と H_w^2 をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}z^m w^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}z^m w^n.$$

(iii) L_z^2 と L_w^2 をそれぞれ以下の Fourier 級数で表される $L^2(\mathbb{T}^2)$ の関数 f の集合とする。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m0}z^m, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{0n}w^n.$$

この報告では、[4] の続きとして、$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の形について考察する。$\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とする。$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus zw\mathfrak{M}$、$\mathfrak{S}_z = \mathfrak{M} \ominus z\mathfrak{M}$、$\mathfrak{S}_w = \mathfrak{M} \ominus w\mathfrak{M}$ とおく。$\mathfrak{F}_z$ と $\mathfrak{F}_w$ をそれぞれ $\mathfrak{F}$ に含まれる最大の z-不変部分空間と w-不変部分空間とする。§2 において、我々は $\mathfrak{F}_z \neq 0$ かつ $\mathfrak{F}_w \neq 0$ となるような $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間の特徴付けを与える。またそのとき $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる 2 つの unimodular 関数 ϕ_z と ϕ_w が存在して $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ と $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たしている。そこで $\varphi = \overline{\phi_w}\phi_z$ と置き、我々は次の不変部分空間を考える。

$$\mathfrak{M}_\varphi = [H^2(\mathbb{T}^2) + \varphi H^2(\mathbb{T}^2)]。$$

このとき、$\mathfrak{M}$ は $N = \overline{\phi_w}\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_\varphi$ として $\phi_w(\mathfrak{M}_\varphi \oplus N)$ という形で表せる. §3 では $\mathrm{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 φ を考える。その φ に対して、不変部分空間 $\mathfrak{M}_\varphi$ の特徴付けを与える。つまり $\mathfrak{F}_w = H^2(w)$ と $\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$ が成立するための十分条件について考える。§4 では [4] の一般化として、次の不変部分空間を考える。

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)} = [H^2(\mathbb{T}^2) + \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(\mathbb{T}^2)]$$

($\psi_\alpha^{(m,n)}$ の定義は §4 参照)。更に、$\mathfrak{M}$ がある $\alpha \in \mathbb{D}$ に対して $\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ の形になるための必要かつ十分条件を考える。ただし、$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする。

この報告は、Guoxing Ji(Shaanxi Normal University、China) と大和田智義（鶴岡高専）との共同研究である。

2 zw-不変部分空間としての不変部分空間

$\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とする。自然数 n に対して $z^n\mathfrak{M} \supset z^{n+1}\mathfrak{M}$ と $w^n\mathfrak{M} \supset w^{n+1}\mathfrak{M})$ が成り立つので、$\bigcap_{k=1}^{\infty} z^k\mathfrak{M}$ と $\bigcap_{k=1}^{\infty} w^k\mathfrak{M}$ は不変部分空間である。$\bigcap_{k=1}^{\infty} z^k\mathfrak{M} = \{0\}$ (resp. $\bigcap_{k=1}^{\infty} w^k\mathfrak{M} = \{0\}$) が成り立つとき、$\mathfrak{M}$ は z-pure (resp. w-pure) であるという。$z\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ (resp. $w\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$) が成り立つとき、$\mathfrak{M}$ は z-reducing (resp. w-reducing) であるという。z-reducing (resp. w-reducing) な不変部分空間は [7] で特徴付けされている。

$\mathfrak{M}$ は不変部分空間であるので、$\mathfrak{M}$ は zw-不変でもあり、自然数 n に対して $(zw)^n\mathfrak{M} \supset (zw)^{n+1}\mathfrak{M}$ が成り立つ。$\bigcap_{k=1}^{\infty}(zw)^k\mathfrak{M} = \{0\}$ が成り立つとき、$\mathfrak{M}$ は zw-pure であるという。$zw\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ が成り立つとき、$\mathfrak{M}$ は zw-reducing であるという。まず最初に次の命題が成り立つ。

Proposition 2.1 $\mathfrak{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間としたとき、次が成り立つ。

(i) $\mathfrak{M}$ が *z-pure* かまたは *w-pure* であるとき、$\mathfrak{M}$ は *zw-pure* である。

(ii) $\mathfrak{M}$ が *zw-reducing* であることの必要かつ十分条件は $\mathfrak{M}$ が *z-reducing* かつ *w-reducing* を満たすことである。

$\mathfrak{M}$が zw-reducing であるときは、[6] と [7] により $\mathfrak{M}$の形はよく知られている。従って今後は $\mathfrak{M}$が zw-pure であるという仮定のもとで、話を進めていく。$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \ominus zw\mathfrak{M}$、$\mathfrak{S}_z = \mathfrak{M} \ominus z\mathfrak{M}$、$\mathfrak{S}_w = \mathfrak{M} \ominus w\mathfrak{M}$ とおくと、次を得る。

Proposition 2.2 次が成り立つ。

(i) $\mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus z^k \mathfrak{S}_z \oplus \bigcap_{k=1}^{\infty} z^k \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus w^k \mathfrak{S}_w \oplus \bigcap_{k=1}^{\infty} w^k \mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus (zw)^k \mathfrak{F}$。

(ii) $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_z \oplus z\mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}_w \oplus w\mathfrak{S}_z$。

$\mathfrak{F}_z$ (resp. $\mathfrak{F}_w$) を $\mathfrak{F}$ に含まれる最大の z-不変 (resp. w-不変) 部分空間とすると、$\mathfrak{F}_z = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{z}^k \mathfrak{F}$、$\mathfrak{F}_w = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{w}^k \mathfrak{F}$、$\mathfrak{F}_z \subset \mathfrak{S}_w$、$\mathfrak{F}_w \subset \mathfrak{S}_z$ が成り立つ。

Proposition 2.3 $\mathfrak{F}_z$ (*resp.* $\mathfrak{F}_w$) は $\mathfrak{S}_w$ (*resp.* $\mathfrak{S}_z$) に含まれる最大の z-不変 (*resp.* w-不変) 部分空間である。

Proposition 2.4 (cf. [4, Proposition 2]) $\mathfrak{M}$を *zw-pure* な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とすると、次が成り立つ。

(i) $z\mathfrak{F}_z \subsetneq \mathfrak{F}_z$ であるための必要かつ十分条件は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる *unimodular* 関数 ϕ_z が存在して $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ が成り立つことである。

(ii) $\mathfrak{F}_z = z\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ であるための必要かつ十分条件は $\mathfrak{M} = \chi_E q H_z^2$ と表せることである. ここで q は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数で、χ_E は $\mathbb{T}^2$ の *Borel* 部分集合 E 上の特性関数で $\chi_E \in L_z^2$ と $\chi_E \neq 0$ を満たす。さらに、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z$ と $\mathfrak{F}_w = \{0\}$ が成り立つ。

同様に我々は $\mathfrak{F}_w$ についての次の結果を得る。

Proposition 2.5 (cf. [4, Proposition 3]). $\mathfrak{M}$を *zw-pure* な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とすると、次が成り立つ。

(i) $z\mathfrak{F}_w \subsetneq \mathfrak{F}_w$ であるための必要かつ十分条件は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ に含まれる *unimodular* 関数 ϕ_w が存在して $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(z)$ が成り立つことである。

(ii) $\mathfrak{F}_w = w\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ であるための必要かつ十分条件は $\mathfrak{M} = \chi_E q H_w^2$ と表せることである。ここで q は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数で、χ_E は $\mathbb{T}^2$ の *Borel* 部分集合 E 上の特性関数で $\chi_E \in L_w^2$ と $\chi_E \neq 0$ を満たす。さらにこのとき、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_w$ と $\mathfrak{F}_z = \{0\}$ が成り立つ。

以後、$\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ と $\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ を仮定して議論を進めていく。このとき、$z\mathfrak{F}_z \subsetneq \mathfrak{F}_z$ と $w\mathfrak{F}_w \subsetneq \mathfrak{F}_w$ を得る。 なぜなら、$\mathfrak{F}_z = z\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$ と仮定すると、命題 4 の (ii) より、$\mathfrak{M} = \chi_E q H_z^2$ と $\mathfrak{F}_w = \{0\}$ を得る。 しかしこれは矛盾である。 従って、$L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数 ϕ_z と ϕ_w が存在し、$\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$ と $\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たす。$\widetilde{\mathfrak{M}} = \overline{\phi}_w \mathfrak{M}$ と置くと、$\widetilde{\mathfrak{M}}$ もまた $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間である。$\widetilde{\mathfrak{F}} = \widetilde{\mathfrak{M}} \ominus zw\widetilde{\mathfrak{M}}$ とする。 $(\widetilde{\mathfrak{F}})_z$ (resp. $(\widetilde{\mathfrak{F}})_w$) を $\widetilde{\mathfrak{F}}$ の最大の z-不変 (resp. w-不変) 部分空間とする。

$\varphi = \overline{\phi}_w \phi_z$ と置き、更に $\mathfrak{M}_\varphi = [H^2(\mathbb{T}^2) + \varphi H^2(\mathbb{T}^2)]$ と置く。このとき $\mathfrak{M}_\varphi$ は zw-pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間で $\mathfrak{M}_\varphi$ は $\widetilde{\mathfrak{M}}$ に含まれる。 $\mathfrak{F}^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus zw\mathfrak{M}_\varphi$、$\mathfrak{S}_z^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus z\mathfrak{M}_\varphi$、$\mathfrak{S}_w^\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \ominus w\mathfrak{M}_\varphi$ とそれぞれ置く。 $\mathfrak{F}_z^\varphi$ (resp. $\mathfrak{F}_w^\varphi$) を $\mathfrak{F}_\varphi$ に含まれる最大の z-不変 (resp. w-不変) 部分空間とする。このとき、

Proposition 2.6 (i) $\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$、$\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$。
(ii) φ は $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数で $\mathrm{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす。

従って次を得る。

Theorem 2.7 $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$、$\mathfrak{F}_w = \phi_w H^2(w)$ を満たす $L^2(\mathbb{T}^2)$ の *zw-pure* 不変部分空間とする。 ただし、ϕ_w と ϕ_z は $L^2(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数とする。 $\varphi = \overline{\phi}_w \phi_z$、$N = \widetilde{\mathfrak{M}} \ominus \mathfrak{M}_\varphi$ と置くとき $\mathfrak{M}$ は次のように表せる。

$$\mathfrak{M} = \phi_w(\mathfrak{M}_\varphi \oplus N)。$$

ただし、φ は $\mathrm{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数である。

Example 2.8 自然数 m と n に対して、我々は次の不変部分空間を考える。

$$H^2_{m,n}(\mathbb{T}^2) = [z^m H^2(\mathbb{T}^2) + w^n H^2(\mathbb{T}^2)].$$

$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{F}_w = w^m H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = w^n H^2(z)$ を満たす不変部分空間とする。 そのとき、明らかに $\mathfrak{M} \supset H^2_{m,n}(\mathbb{T}^2)$ が成り立つ。 また、$N = \overline{w^n}(\mathfrak{M} \ominus H^2_{m,n}(\mathbb{T}^2))$ と置くと

$$\mathfrak{M} = H^2_{m,n}(\mathbb{T}^2) \oplus w^n N$$

が成り立つ。

$m=1$ または $n=1$ のときは、$N=0$ となる。$m=n=2$ のときは、N の形は以下のいずれかの形になることがわかる。

(i) $N=\{0\}$;

(ii) $N=[z\overline{w}]$;

(iii) $N=[z\overline{w}, \alpha z\overline{w}^2+\beta\overline{w}]$。ただし、$\alpha$ と β は $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を満たす 0 でない複素数である。

3 不変部分空間 $\mathfrak{M}_\varphi$

φ を $\mathrm{supp}\hat{\varphi}\subset\mathbb{Z}_+\times(-\mathbb{Z}_+)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数とする。$\mathfrak{M}_\varphi=[H^2(\mathbb{T}^2)+\varphi H^2(\mathbb{T}^2)]$ と置く。このとき $\mathfrak{M}_\varphi$ は次を満たす zw-pure な $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間である。

$$H^2(\mathbb{T}^2)\subset\mathfrak{M}_\varphi\subset H^2_w.$$

$\mathfrak{F}^\varphi=\mathfrak{M}_\varphi\ominus zw\mathfrak{M}_\varphi$、$\mathfrak{S}^\varphi_z=\mathfrak{M}_\varphi\ominus z\mathfrak{M}_\varphi$、$\mathfrak{S}^\varphi_w=\mathfrak{M}_\varphi\ominus w\mathfrak{M}_\varphi$ と置く。更に $\mathfrak{F}^\varphi_z$(resp. $\mathfrak{F}^\varphi_w$) を $\mathfrak{F}^\varphi$ に含まれる最大の z-不変 (resp. w-不変) 部分空間とする。もし $\varphi\in H^2(z)$ とすると、$\mathfrak{M}_\varphi=H^2(\mathbb{T}^2)$ であるから、$\varphi\notin H^2(z)$ と仮定する。

この節では、$\mathfrak{F}^\varphi_z=\varphi H^2(z)$ and $\mathfrak{F}^\varphi_w=H^2(w)$ という条件を考える。

Proposition 3.1 φ を $\mathrm{supp}\hat{\varphi}\subset\mathbb{Z}_+\times(-\mathbb{Z}_+)$、$\varphi\notin H^2(z)$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の *unimodular* 関数とする。そのとき $\varphi H^2(z)\subset\mathfrak{F}^\varphi_z\subset\varphi L^2_z$、$H^2(w)\subset\mathfrak{F}^\varphi_w\subset L^2_w$ が成り立つ。

Theorem 3.2 次が成り立つ。

(i) $\mathfrak{F}^\varphi_w=H^2(w)$ であることと、$\mathfrak{M}_\varphi\cap\overline{wH^2(w)}=\{0\}$ であることは同値である。

(ii) $\mathfrak{F}^\varphi_z=\varphi H^2(z)$ であることと、$\mathfrak{M}_\varphi\cap\varphi\overline{zH^2(z)}=\{0\}$ であることは同値である。

Corollary 3.3 次が成り立つ。

(i) $\mathfrak{M}_\varphi\perp\overline{wH^2(w)}$ が成り立つとき、$\mathfrak{F}^\varphi_w=H^2(w)$ が成り立つ。

(ii) $\mathfrak{M}_\varphi\perp\varphi\overline{zH^2(z)}$ が成り立つとき、$\mathfrak{F}^\varphi_z=\varphi H^2(z)$ が成り立つ。

Corollary 3.4 次が成り立つ。

(i) $1 \in \mathfrak{S}_w^\varphi$ が成り立つことと、$\hat{\varphi}(0,n)=0$ が 1 以上のすべての自然数 n に対して成り立つことは同値である。 更にこの場合、$\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ が成り立つ。

(ii) $\varphi \in \mathfrak{S}_z^\varphi$ が成り立つことと、$\hat{\varphi}(m,0)=0$ が 1 以上のすべての自然数 m に対して成り立つことは同値である。更にこの場合、$\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$ が成り立つ。

(iii) $\hat{\varphi}(m,0)=\hat{\varphi}(0,-n)=0$ が 1 以上のすべての自然数 m と n に対して成り立つとき,$\mathfrak{F}_z^\varphi = \varphi H^2(z)$, $\mathfrak{F}_w^\varphi = H^2(w)$ が成り立つ。

4 不変部分空間のあるクラス

§2 における記号や仮定のもとで、$\mathfrak{F}_z \neq \{0\}$、$\mathfrak{F}_w \neq \{0\}$ を仮定する。 一般的には $\mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w \subset [\mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_w] \subset \mathfrak{F}$ が成り立つ。[4] では、我々は $\mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w = [\mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_w]$ を満たす不変部分空間の構造について研究した。

$\mathbb{D}$ を複素数平面の単位円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする。任意の $\alpha \in \mathbb{D}$, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して関数 $\psi_\alpha^{(m,n)}$ を

$$\psi_\alpha^{(m,n)}(z,w) = \frac{z^m \overline{w}^n - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z^m \overline{w}^n}$$

で定義する。このとき $\psi_\alpha^{(m,n)}$ は任意の $(k,\ell) \in \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$ に対して $\widehat{\psi_\alpha^{(m,n)}}(k,\ell) = 0$ を満たす $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ の unimodular 関数である。 更に、$L^2(\mathbb{T})$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ を

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)} = [H^2(\mathbb{T}^2) + \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(\mathbb{T}^2)]$$

とおくと、次を得る。

Theorem 4.1 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$ ならば、次が成り立つ。

$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(z)$、$\mathfrak{S}_w = \psi_\alpha^{(m,n)} H^2(z) + [1, z, \cdots, z^{m-1}]$, $\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\psi_\alpha^{(m,n)}, w\psi_\alpha^{(m,n)}, \cdots, w^{n-1}\psi_\alpha^{(m,n)}]$。更に、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, \cdots, z^m] + [w\psi_\alpha^{(m,n)}, \cdots, w^{n-1}\psi_\alpha^{(m,n)}] \\ &= \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, \cdots, z^{m-1}] + [w\psi_\alpha^{(m,n)}, \cdots, w^{n}\psi_\alpha^{(m,n)}].\end{aligned}$$

そこで、定理4.1の逆として、次の定理を得る。

Theorem 4.2 $\mathfrak{M}$を*zw-pure*な$L^2(\mathbb{T}^2)$の不変部分空間とし、mとnを自然数とする。そのとき、ある$\alpha \in \mathbb{D}$が存在して$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$が成り立つことと、$\mathrm{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$を満たす$L^\infty(\mathbb{T}^2)$の*unimodular*関数$\varphi$が存在して$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$、$\mathfrak{S}_w = \varphi H^2(z) + [1, \cdots, z^{m-1}]$, $\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\varphi, w\varphi, \cdots, w^{n-1}\varphi]$となることは同値である。

特に$\hat{\varphi}(0,0) = 0$であるとすると、$\alpha = 0$より次が成り立つ。

Corollary 4.3 $\mathfrak{M}$を*zw-pure*な$L^2(\mathbb{T}^2)$の不変部分空間とし、mとnを自然数とする。このとき、$\mathfrak{M} = \overline{w^n} H^2_{m,n}(\mathbb{T}^2)$が成り立つことと、$\mathrm{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{Z}_+ \times (-\mathbb{Z}_+)$、$\hat{\varphi}(0,0) = 0$を満たす$L^\infty(\mathbb{T}^2)$の*unimodular*関数$\varphi$が存在して$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \varphi H^2(z)$、$\mathfrak{S}_w = \varphi H^2(z) + [1, \cdots, z^{m-1}]$、$\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\varphi, w\varphi, \cdots, w^{n-1}\varphi]$となることは同値である。

最後に定理4.2の反例を挙げる。即ち、ある unimodular 関数ϕ_zが存在して$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$を満たすが、$\mathfrak{M}$は$\mathfrak{M}_\alpha^{(m,n)}$の形をしていない例である。

Example 4.4 $\psi_\alpha^{(m,n)}$は先に定義したものとし、$\phi_z = z\psi_\alpha^{(1,1)}$と置く. 更に$H_w^2$に含まれる不変部分空間$\mathfrak{M}_z$を

$$\mathfrak{M}_z = [H^2(\mathbb{T}^2) + \phi_z H^2(\mathbb{T}^2)]$$

で定義する。 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_z$が成り立つとすると、$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \phi_z H^2(z)$、$\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\phi_0]$、$\mathfrak{S}_w = \phi_z H^2(z) + [1, z]$が成り立つ。 ただし、$\phi_0 = \phi_z - < \phi_z, z > z$である。 従って、

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z, z^2]$$

が成り立つ。

Example 4.5 $\psi_\alpha^{(m,n)}$ は先に定義したものとし、$\phi_w = \overline{w}\psi_\alpha^{(1,1)}$ と置く。更に H_w^2 に含まれる不変部分空間 $\mathfrak{M}_w$ を

$$\mathfrak{M}_w = [H^2(\mathbb{T}^2) + \phi_w H^2(\mathbb{T}^2)]$$

で定義する。$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_w$ が成り立つとすると、$\mathfrak{F}_w = H^2(w)$、$\mathfrak{F}_z = \phi_w H^2(z)$、$\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\phi_w, w\phi_w]$、$\mathfrak{S}_w = \phi_z H^2(z) + [\phi_0]$ が成り立つ。ただし、

$$\phi_0 = z\overline{w} + \frac{1-|\alpha|^2}{\bar{\alpha}}$$

である。従って

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z + \mathfrak{F}_w + [z\overline{w}, z\phi_0]$$

が成り立つ。

以上の2つの例は、定理4.2は $\mathfrak{S}_w = \phi_z H^2(z) + [1, z, \cdots, z^{m-1}]$、$\mathfrak{S}_z = H^2(w) + [\phi_z, \cdots, w^{n-1}\phi_z]$ という条件無しでは成り立たないことを示している。

参考文献

[1] D. Gaspar and N. Suciu, *On invariant subspaces in the bitorus*, J. Operator Theory, **30**(1993), 227-241.

[2] P. Ghatage and V. Manderkar, *On Beurling type invariant subspaces of $L^2(\mathbb{T}^2)$ and their equivalence*, J. Operator Theory, **20** (1988), 31-38.

[3] H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York, 1964.

[4] G. Ji, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Certain invariant subspace structure of $L^2(\mathbb{T}^2)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2361-2368.

[5] R. Mandrekar, *The validty of Beurling theorems in polidisc*, Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 145-148.

[6] T. Nakazi, *Certain invariant subspaces of H^2 and L^2 on a bidisc*, Canad. J. Math., **40** (1988), 1722-1280.

[7] T. Nakazi, *Invariant subspaces in the bidisc and commutators*, J. Austral. Math. Soc., **56** (1994), 232-242.